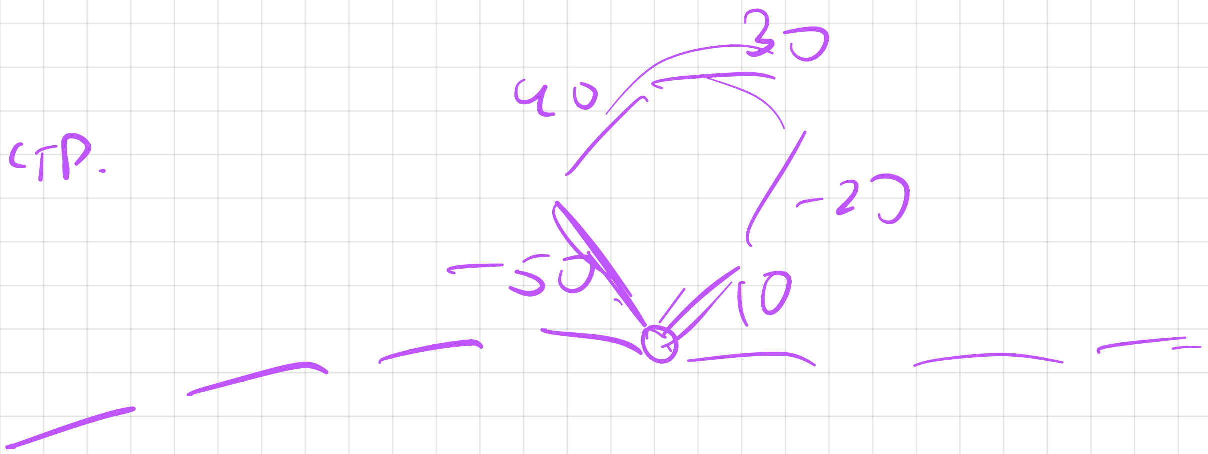
Bellman–Ford

SSSP, w не обяз. ≥ 0.

$dp_{v,d}$ = кр-й путь $s \to v$

V^2 сост. из ровно d рёбер.

иллюстр.



$\sum w_i < 0 \Rightarrow$ беск. короткий путь

$\sum w_i \geq 0 \Rightarrow$ этот цикл можно убрать и станет не хуже.

<u>Утв 1</u> Если в графе нет отр. цикл нужно $\leq n-1$ ребро в кр. пути.

$dp_{v,d}$ = кр-й путь $s \to v$
V^2 сост. из ровно d рёбер.

<u>База:</u>

$dp_{s,0} = 0$ $\qquad d \in [0; n-1]$

$dp_{*,0} = \infty$

v, d

<u>переходы</u>

VE переход

$$dp_{v,d} \leftarrow dp_{u,d-1} + w$$

$$(u, v, w) \in E$$

$E \geq V$

$O(VE)$ времени

и $O(VE)$ памяти.

Д.П.

$dp_{*,*} = \infty$

$dp_{s,0} = 0$

for $d = 0..n-2$:

  for $(u, v, w) \in E$:

    $dp_{v,d+1} = \min(dp_{v,d+1},$

      $dp_{u,d} + w)$

    $dp_{u,d} =$

    $= \min$ по путям длины d

Б.Ф.

$dp_{*} = \infty$

$dp_{s} = 0$

for $d = 0..n-2$:

  for $(u, v, w) \in E$:

    $\underset{(d+1)}{dp_v} = \min(dp_v,$

      $\underset{(d)}{dp_u} + w)$

    $dp_{u,d} =$

    $= \min$ по путям длины d

и ещё какие-то

$dp_{v,d}$ = min по путям длины $= d$.

В момент времени d

$dp_{v,(d)}$ = min по путям длины $\leq d$ и возможно каким-то более длинным путям тоже.

B-F + break

while modified
    modified = false
(*)   for e∈E
            if релакс. по ребру e:
                modified = true.

Поиск отр. цикла.

Утв 2 Если отр. цикла нет, алгоритм (*) не делает никакой релакс при $d \geq n$

d — счётчик числа итер.

Утв 1 $\Rightarrow$ За $n-1$ итерацию мы найдём все кр. пути если нет отр. цикла

Замечание: введём par_v.

релакс.

$v \xleftarrow{w} u$

$par_v = u$.

В момент релакс. $dp_v = dp_{par_v} + w(par_v, v)$

<u>Утв 4:</u> в любой момент

$$dp_v \geq dp_{par_v} + w(par_v, v).$$

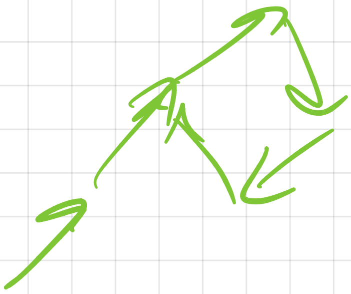
<u>Д-во (4):</u> в момент релакс. выполнено с $=$

после dp_{par_v} может только уйти.

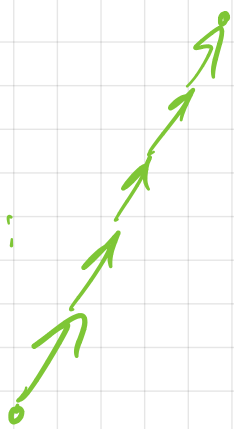
<u>Утв 5</u> Пусть нет отр. циклов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по ссылкам par можно восст. ответ.

проблема 1)



проблема 2:



Почему нет проблемы (2), т.е. пусть циклов нет

но восст. неправ.

$$dp_v \geq dp_{par_v} + w(par_v, v).$$

Если $\forall v: dp_v = dp_{par_v} + w(\ldots)$

то восст. очевидно работает.

Пусть тогда $\exists u$, что

$$dp_u > dp_{par_u} + w(\ldots)$$

Тогда $u \leftarrow par_u$ можно срелакс.

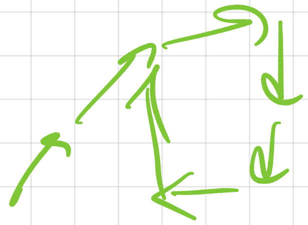
$\Rightarrow$ dp_u можно срелакс

$\Rightarrow$ Алгоритм не нашёл кр.

(Sn релакс) пути как был должен

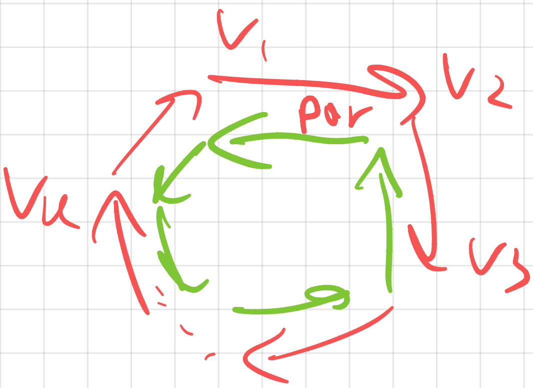
$\Rightarrow$ отр. цикл.

Проблема 1



(пусть есть цикл)

Рассм. цикл.



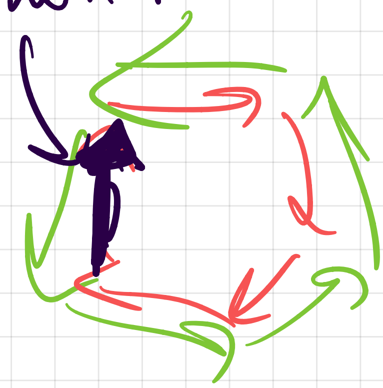
$$dp_{v_1} \geq dp_{v_2} + w(v_2, v_1)$$

$$+ \qquad dp_{v_2} \geq dp_{v_3} + w(v_3, v_2)$$

$$\vdots$$

$$dp_{v_k} \geq dp_{v_1} + w(v_1, v_k)$$

посл. релакс.



$0 > \sum w_i$

$\Rightarrow 0 > \sum w_i$

$\Rightarrow$ против.

Алгоритм. Вопросы

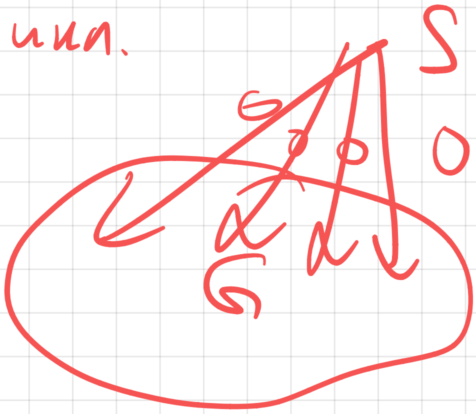
0) Как работать с отсутствием пути.

$dp_v = \infty$

$\infty + 5 = \infty$

$\infty - 5 = \infty$

1) Как проверить что в графе $\exists$ отр. цикл.



и

$\Rightarrow$ проверить будет ли релакс.

чего-то

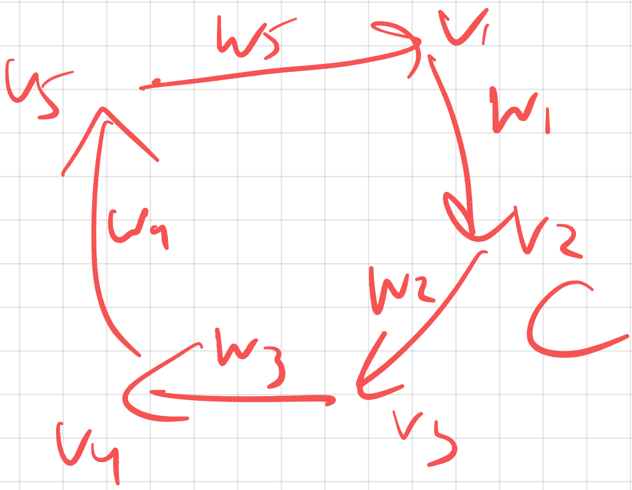
через n итер.

или $dp = [0, 0, \ldots 0]$

Утв 3 Если отр. цикл сущ. и он достижим из S то $\exists v$ которая будет срелакс. на шаге n.

Д-во (3).

Пусть C – отр. цикл.



Тогда в конце:

$$\begin{cases} dp_{v_2} \le dp_{v_1} + w_1 \\ dp_{v_3} \le dp_{v_2} + w_2 \\ \vdots \\ dp_{v_1} \le dp_{v_5} + w_5 \end{cases}$$

$0 < \sum w_i$

противоречие с тем, что ничего не срелаксиров.

2) Пусть отр. циклов нет, хотим найти кр. пути (веса и восст. путь тоже)

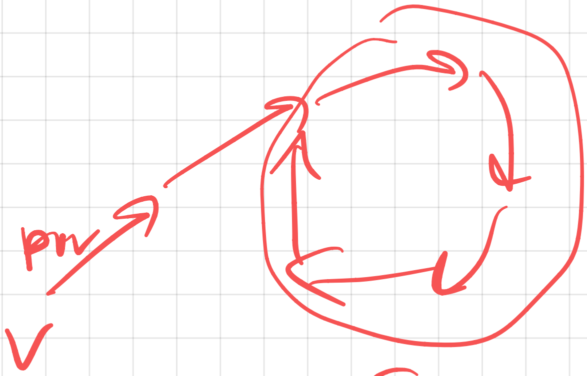
dp, сделать $< n-1$ итераций цикла.

см. утв выше, поэтому можно восст. ответ.

3) Пусть в графе есть отр. цикл, найти его.

(Пусть $\exists$ отр. цикл) $\Rightarrow$ $\exists v$ — которая срелакс на шаге $d = n$

(упр.)



C — отр. цикл.

Floyd – Warshall

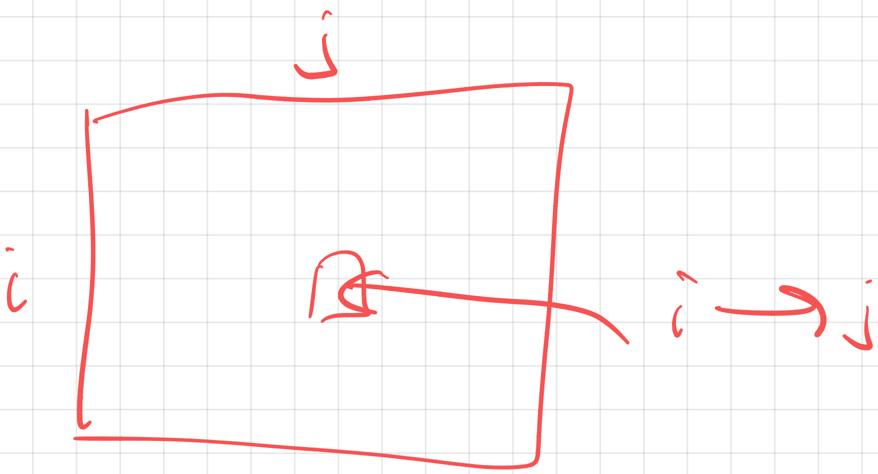
Floyd 1962

Warshall 1962

Roy 1959

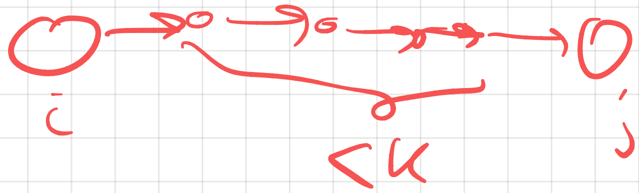
APSP

all pairs sh. paths.



(Можно отр. рёбра, можно отр. циклы если акк.)

$dp_{k,i,j}$ = кр. путь от i до j если промежуточные в-ны могут быть только в-ны $< k$.



$V(G) = \{0..n-1\}$

$$dp_{0,i,j} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{если } \exists \text{ такое ребро} \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

(База)

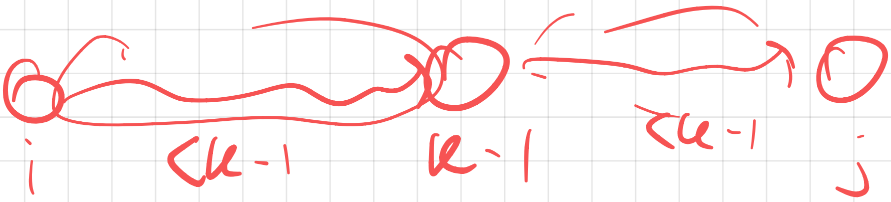
(Переход)

$dp_{k,i,j}$

А

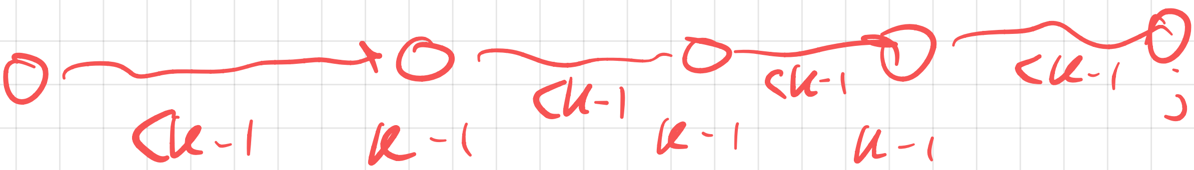
$dp_{k-1,i,j}$

Б



$$dp_{k-1,i,k-1} + dp_{k-1,k-1,j}$$

Б*



не имеет смысла если нет отр. цикла, поэтому такой релакс. мы делать не будем.

```
for (k=1..n)
  for (i)
    for (j)
```

$$dp_{k,i,j} = \min(dp_{k-1,i,j};\ dp_{k-1,i,k-1} + dp_{k-1,k-1,j})$$

$$O(V^3)$$

for(i,j – мн-во рёбер)　　　　　　Алг. Флойда

$dp_{ij} = w_{ij}$

for ($k = 0..n-1$)
　for (i)
　　for (j)

$$dp_{i,j} = \min(dp_{i,j};\ dp_{i,k} + dp_{k,j})$$

<u>восстановление ответа</u>

$par_{ij} = k.$

$$i \longrightarrow j$$

$$i \longrightarrow k \longrightarrow j$$

par_{ij} = последняя в-на на пути $i \to j$

$$j \to par_{ij} \to par_{i,\, par_{ij}}$$

$$dp_{ij} \leftarrow dp_{ik} + dp_{kj}$$

$$par_{ij} = par_{kj}$$

Отр. циклы.

<u>Утв</u> ∃ отр. цикл содерж. v

$$\Uparrow$$

$$dp_{v,v} < 0$$

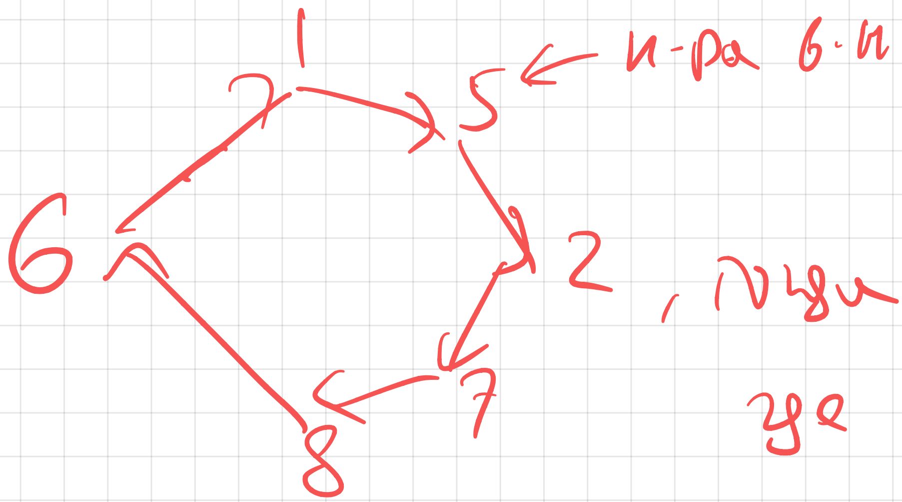
Утв: ∃ отр цикл

$$\Downarrow$$

$\exists v$: $dp_{v,v} < 0$

Д-во: ($\Uparrow$)

($\Downarrow$) пусть C — простой отр. цикл. проход.



, тогда $dp_{v,v} < 0$

где $v = \max(C)$

dp_{ij} = мин по простым путям $i \to j$ сод. только в-ны $\le k$ как внутр.

и ещё каким-то другим путям $i \to j$

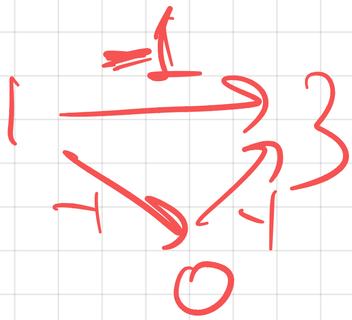
Переполнение

$$\begin{pmatrix} & -1 & -1 & -1 \\ -1 & & -1 & -1 \\ -1 & -1 & & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \end{pmatrix}$$

$k = 0$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & -2 & -2 \\ ? & -2 & ? & -2 \\ ? & -2 & -2 & ? \end{pmatrix}$$



$\downarrow$

-4

$\downarrow$

-8

$$a \xrightarrow{[-w;\ w]} b$$

$$s \xrightarrow[{[-(n-1)w;\ +(n-1)w]}]{} t$$

1) поставить кеп $(n-1)w$

2) в каждый момент проверять что $\exists v: dp_{v,v} < 0$